Nombre conjugué d'un nombre complexe

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ (a et b réels) est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

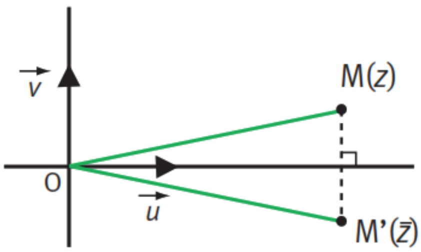
$$\overline{z} = a - ib. \qquad (\overline{z} \text{ se lit « } z \text{ barre »}).$$

Remarque On a déjà utilisé ce nombre dans les calculs faits pour trouver la forme algébrique d'un inverse ou d'un quotient.

▸ Exemple

- Si $z = 2 + 3\text{i}$, on a $\overline{z} = 2 - 3\text{i}$;
- si $z = 4 - 5\text{i}$, on a $\overline{z} = 4 + 5\text{i}$;
- si $z = \text{i}$, on a $\overline{z} = -\text{i}$;
- si $z = 7$, on a $\overline{z} = 7$.

Remarque On observe que z et $\overline{z}$ ont la même partie réelle et que leurs parties imaginaires sont opposées.



Géométriquement, les points images d'un nombre complexe et de son conjugué sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' :

a) $\overline{\overline{z}} = z$;

b) pour tout réel λ, $\overline{\lambda} = \lambda$ et, pour tout imaginaire pur $\mathrm{i}b$, $\overline{\mathrm{i}b} = -\mathrm{i}b$;

c) $z\overline{z} = a^2 + b^2$, et donc $z\overline{z}$ est réel ;

d) $z + \overline{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$,

$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$;

e) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

f) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; cas particuliers : pour tout λ réel, $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ et donc $\overline{-z} = -\overline{z}$;

g) pour tout $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

h) pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Propriété

- Caractérisation d'un nombre réel : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- Caractérisation d'un imaginaire pur : z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Exemple

Sans chercher la forme algébrique, donner directement les conjugués de z et de z' avec $z = (4-5\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ et $z' = \dfrac{4-5\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$.

- $\overline{z} = \overline{(4-5\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \overline{(4-5\mathrm{i})}\,\overline{(3+\mathrm{i})} = (4+5\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$
- $\overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{4-5\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{4-5\mathrm{i}}}{\overline{3+\mathrm{i}}} = \dfrac{4+5\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$