Opérations sur les nombres complexes

Propriété

- Nombre complexe nul : $a+\mathrm{i}b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$.
- Égalité : $a+\mathrm{i}b=a'+\mathrm{i}b' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$ (où a, b, a' et b' sont réels).
- Caractérisation d'un nombre réel : $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$.
- Caractérisation d'un imaginaire pur : z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.

Propriété

Pour tous nombres complexes $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$, a, b, a' et b' étant des nombres réels, on a :

$$z+z'=(a+a')+\mathrm{i}(b+b')\ ;$$

$$zz'=(aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)\ ;$$

$$kz=ka+\mathrm{i}kb \text{ pour tout réel } k\,;$$

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{si } z\neq 0.$$

▶ Exemples

- $(2+3\mathrm{i})+(5-4\mathrm{i})=2+5+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}=7-\mathrm{i}$.
- $(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=2+\mathrm{i}+3=5+\mathrm{i}$, car $\mathrm{i}^2=-1$.
- $(2+3\mathrm{i})^2=2^2+2\times 2\ \ 3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2=4+12\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2=4+12\mathrm{i}-9=-5+12\mathrm{i}$.

Ici, on a utilisé une identité remarquable qui se calcule comme dans $\mathbb{R}$; on a aussi utilisé le fait que $\mathrm{i}^2=-1$.

- $(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})=1^2-(3\mathrm{i})^2=1-9\mathrm{i}^2=1+9=10$.

Ici, c'est l'identité remarquable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ qui a été utilisée en prenant $x=1$ et $y=3\mathrm{i}$.

On peut remarquer que le produit de ces deux nombres complexes non réels est un nombre réel.

Exemple

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(1+i)^3\ ;\ \frac{1}{7-4i}\ ;\ \frac{2-3i}{1+4i}\ ;\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9\ ;\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{35}.$$

▸ Solution

- $(1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$
- $\dfrac{1}{7-4i} = \dfrac{7+4i}{(7-4i)(7+4i)} = \dfrac{7+4i}{7^2+4^2} = \dfrac{7}{65} + \dfrac{4}{65}i$
- $\dfrac{2-3i}{1+4i} = \dfrac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \dfrac{2-3i-8i-12}{1^2+4^2} = -\dfrac{10}{17} - \dfrac{11}{17}i$
- $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^9 = \left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^9 = \left(\dfrac{1+2i-1}{1^2+1^2}\right)^9 = (i)^9 = i$

Remarque Penser à simplifier d'abord la parenthèse et ne faire agir qu'ensuite l'exposant.

- $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{35} = \left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right) = \left(\dfrac{1-2i-1}{1^2+1^2}\right)^{35} = (-i)^{35} = (-1)^{35}(i)^{35} = -i^{35}$

$$= -i^{4\times 8+3} = -(i^4)^8 \times i^3 = -1^8 \times i^3 = -i^3 = -(-i) = i$$