Continuité d'une fonction, Théorème des valeurs intermédiaires

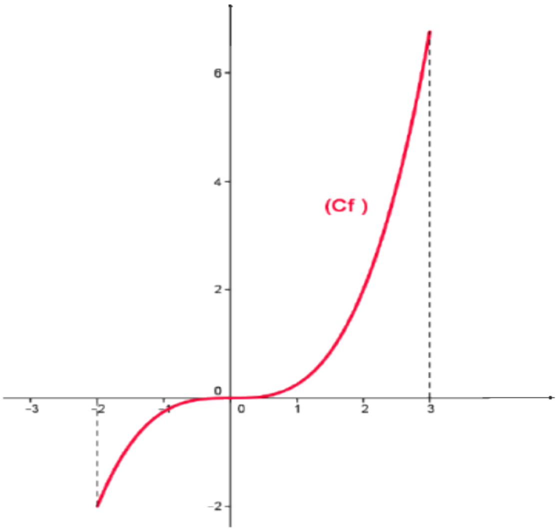
I) Notion de continuité

I. Définition

On dit qu'une fonction est **continue** sur un intervalle I lorsque le tracé de sa courbe représentative sur l'intervalle I se fait sans lever le crayon.

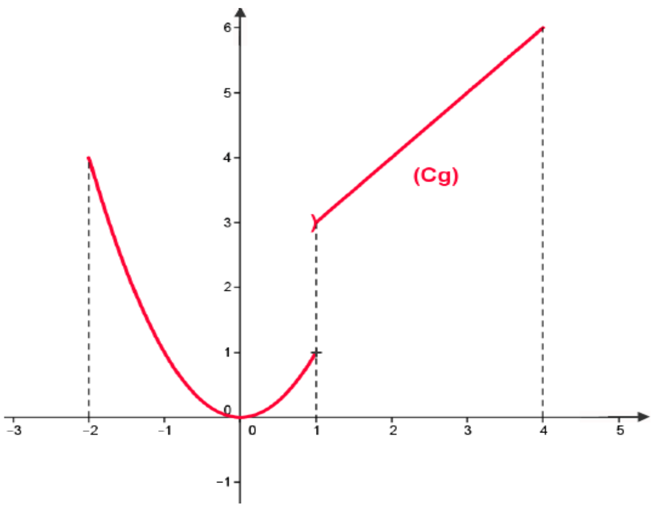
Exemples :

f est une fonction définie sur l'intervalle I = [– 2 ; 3] dont la courbe $(\mathcal{C}f)$ est représentée ci-dessous :



Cette courbe se trace sans lever le crayon sur I donc la fonction f est continue sur I.

g est une fonction définie sur l'intervalle I = [– 2 ; 4] dont la courbe (Cg) est représentée ci-dessous :



Cette courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon au point d'abscisse 1 donc la fonction g n'est pas continue sur I. (par contre elle est continue sur les intervalles [– 2 ;1] et]1 ; 4])

Remarques sur la continuité :

- Si une fonction f est continue sur un intervalle I, elle est continue en chaque point de cet intervalle.
- Dire qu'une fonction f est continue en a signifie que f a une limite finie en a telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

II. Théorème des valeurs intermédiaires

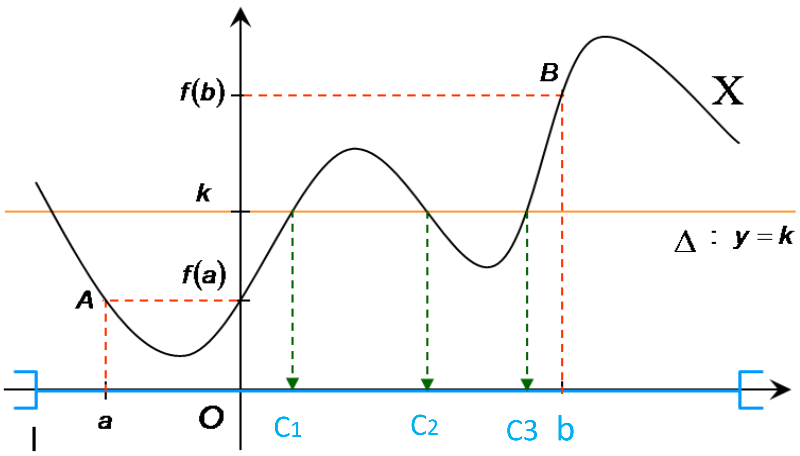
Théorème

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **continue** sur un intervalle $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$.

Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ compris entre $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ il existe au moins un réel $\boldsymbol{c}$ de l'intervalle $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{k}$.

Autrement dit l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}]$.

Illustration :



Remarque : Comme le montre la figure ci-dessus le nombre C n'est pas nécessairement unique (ici il y aurait trois valeurs).

Théorème des valeurs intermédiaires : Cas d'une fonction strictement monotone ; on l'appelle le Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire du TVI

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$.

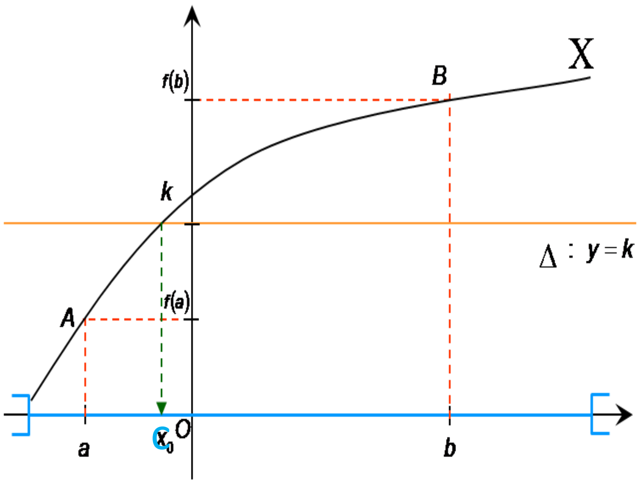
Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ compris entre $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ il existe un unique réel $\boldsymbol{c}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{k}$.

Autrement dit l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$.

Démonstration :

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, le TVI nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$ pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$. La fonction f étant strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$ on a pour tout $x \in [a\,;b]$, tel que $x \neq c$, $f(x) \neq f(c)$. On peut donc en conclure que le réel c est unique.

Illustration



Remarque :
Pour démontrer que l'équation $f(x)=k$ a une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$, il suffit de démontrer que f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Cas particulier :

Pour démontrer que l'équation $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{0}$ a une unique solution sur l'intervalle $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$, il suffit de démontrer que $\boldsymbol{f}$ est continue et strictement monotone sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$ et que $\boldsymbol{f(a)} \times \boldsymbol{f(b)} < \mathbf{0}$.

Théorème TVI :Cas généralisé d'une fonction monotone

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de la forme $]-\infty\,;\boldsymbol{a}[$ ou $]\boldsymbol{a}\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;+\infty[$ et admettant les limites $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{m}$ réelles ou infinies aux bornes de cet intervalle. Alors pout tout réel $\boldsymbol{k}$ compris entre $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{m}$ il existe un unique réel $\boldsymbol{c} \in \mathrm{I}$ tel que $\boldsymbol{f(c)} = \boldsymbol{k}$