Exercice type sur le théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f est la fonction définie sur l'intervalle [-3 ; 6] par $f(x) = x^3 - 12x$.

1. **Déterminer f '(x) et dresser le tableau de variation de f.**
2. **Pourquoi l'équation f(x) = 30 a-t-elle des solutions dans l'intervalle [-3 ; 6] ?**
3. **Combien cette équation a-t-elle de solutions ?**
4. **En donner une approximation d'amplitude 10^{-2}, en utilisant la calculatrice.**

Corrigé

1. **f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur [-3 ; 6].**

Pour tout x $\in$ [-3 ; 6], $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.

D'après la propriété sur le signe d'un trinôme qui est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines et du signe contraire à a à l'intérieur, on en déduit que :

$f'(x) > 0$ pour $x \in [-3 ; -2[\cup]2 ; 6[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]-2 ; 2[$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	9	↗	16	↘	-16	↗	144

2. $f(-3) = 9$, $f(6) = 144$ et $30 \in [9 ; 144]$

La fonction f est une fonction polynôme, elle est **alors continue** sur IR et en particulier sur [-3 ; 6] ; de plus **30 est compris entre $f(-3)$ et $f(6)$.**

Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc d'affirmer que l'équation f(x) = 30 a au moins une solution dans l'intervalle [-3 ; 6].

3.
- f est croissante sur [-3 ; -2] et décroissante sur [-2 ; 2], elle admet alors $f(-2)$ = **16 pour maximum sur [- 3 ;2].**

L'équation $f(x) = 30$ n'admet donc pas de solution sur [-3 ; 2].

- f (2) = - 16 et f(6) = 144 et $30 \in [-16 ; 144]$

x	2		α		6
f					144
		↗	30	↗	
	-16				

f est strictement croissante et continue sur [2 ; 6] et 30 est compris entre f(2) et f (6) et donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

L'équation $f(x) = 30$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 6].

4. On tabule $f(x)$ sur l'intervalle [2 ; 6] avec un pas de 0,1 puis avec un pas de 0,01.

   • on observe que : $f(4{,}3) \leq 30$ et $f(4{,}4) \geq 30$

   On sait que $f(\alpha) = 30$ donc $4{,}3 \leq \alpha \leq 4{,}4$

   • on observe que : $f(4{,}34) \leq 30$ et $f(4{,}35) \geq 30$

   On sait que $f(\alpha) = 30$ donc $4{,}34 \leq \alpha \leq 4{,}35$

   Donc un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α est $4{,}34 \leq \alpha \leq 4{,}35$.