Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI.)

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur par $f(x)=x^3+x^2-x$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur [-1 ;2].

2) Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

3) En déduire que l'équation $f(x)=5$ admet au moins une solution dans [-1 ;2].

Pour lire le corrigé complet de cet exercice, cliquez sur le lien ci-dessous

Rappel : Le corrigé n'a d'intérêt que si l'exercice a été cherché.

Correction ▼

Exercice n°2.

On considère la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4$

1) *Calculer la dérivée de f ainsi que les limites aux bornes de* Df .

En déduire le tableau de variation de f *sur* $\mathbb{R}$.

2) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) *Donner un encadrement puis une valeur approchée, arrondie à* 10^{-2} *près, de* α .

4) *Déduire de des résultats précédents le signe de* $f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$

Pour lire le corrigé complet de cet exercice, cliquez sur le lien ci-dessous

Rappel : Le corrigé n'a d'intérêt que si l'exercice a été cherché.

Correction ▼

Exercice n° 3.

Soit *f* est la fonction définie sur l'intervalle [-3 ; 6] par *f*(*x*) = $x^3 - 12x$.

a) Déterminer *f* '(*x*) et dresser le tableau de variation de *f*.

b) Pourquoi l'équation *f*(*x*) = 30 a-t-elle des solutions dans l'intervalle [-3 ; 6] ?

c) Combien cette équation a-t-elle de solutions ?

d) En donner une approximation d'amplitude 10^{-2} , en utilisant la calculatrice.

Pour lire le corrigé complet de cet exercice, cliquez sur le lien ci-dessous

Rappel : Le corrigé n'a d'intérêt que si l'exercice a été cherché.

Correction ▼

Exercice n°4

Ci-après figure le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ - { 2}.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

1) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$.
2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$.

Pour lire le corrigé complet de cet exercice, cliquez sur le lien ci-dessous

Rappel : Le corrigé n'a d'intérêt que si l'exercice a été cherché.

Correction ▼

Corrigé exercice n°1 - énoncé ▼

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est **continue sur** $\mathbb{R}$
et en particulier sur $[-1\,;2\,] \subset \mathbb{R}$.

2) Calculons $f(-1)$ et $f(2)$.

D'une part, $f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)=1$. D'autre part, $f(-1)=(2)^3+(2)^2-(2)=10$.

3) Montrons que l'équation $f(x)=5$ admet au moins une solution dans l'intervalle [-1 ;2].

> **Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) sur un intervalle fermé borné**
> Soit une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a ;b] (a et b réels tels que $a \prec b$). Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α compris entre a et b tel que $f(\alpha)=k$.
> *Autrement dit, l'équation* $f(x)=k$ *admet au moins une solution dans [a ;b].*

D'une part, f est continue sur [-1 ;2] (d'après la première question). D'autre part, comme $5\in\left[f(-1);f\ f(2)\right]=$ [1 ;10] (d'après la deuxième question), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que **l'équation** $f(x)=5$ **admet au moins une solution dans** [-1 ;2].

Corrigé exercice n°2 - énoncé ▼

1) *Calcul de la dérivée de f ainsi que les limites aux bornes de Df .*

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

a) Pour connaître le sens de variation de *f*, on étudie le signe de $f'(x)$.

On résout d'abord l'équation $f'(x)=0$ c'est-à-dire $3x^2 + 2x - 5 = 0$ avec $a = 3$; $b = 2$ et $c = -5$.

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 4+60 = 64$

$\Delta > 0$, donc cette équation admet deux solutions:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{64}}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{64}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

On en déduit le signe de $f'(x)$. Pour cela, nous avons 2 méthodes :

1ère méthode : on récite le théorème du cours :

«*On sait que qu'un trinôme du second degré est toujours du signe de "a" à l'extérieur des racines* ».

2ème méthode : On factorise l'expression de $f'(x)$ puis on fait un tableau de signe :

$f'(x) = a(x - x1)(x - x2) = 3(x + 53)(x - 1)$

ou encore $f'(x) = (3x+5)(x-1)$

Attention : Il faut séparer le tableau de signes de *f '* et le tableau de variation de f

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-5/3$		1		$+\infty$
$x+\frac{5}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire le tableau de variation de la fonction f

x	$-\infty$		$-5/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10,481$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule $f(\frac{-5}{3}) \approx 10.481 > 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

Calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition :

f est une fonction polynôme, ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont les mêmes que les limites de son terme de plus haut degré. En effet :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4 = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3})$$

Or $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3})=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Donc par produit des limites, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) *Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Nous allons « découper » le domaine de définition en trois intervalles et appliquer le corollaire du TVI. sur chacun de ces intervalles.

1. *Sur $]-\infty\ ;\ -\frac{5}{3}]$, on voit bien que la fonction est continue, strictement croissante et « passe » de valeurs négatives ($-\infty$) à des valeurs positives $f(-\frac{5}{3})>0$. Mais pour appliquer le TVI., il nous faut un intervalle [a ; b]. A l'aide de la calculatrice, on cherche une valeur a < $-\frac{5}{3}$ telle que f (a)<0. Par exemple f (–4)= –24. On a donc :*

Sur l'intervalle [–4 ; $-\frac{5}{3}$], la fonction *f* est définie, continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans $[\,f(-4),\ f(-\frac{5}{3})\,]$. De plus, $0\in[\,f(-4),\ f(-\frac{5}{3})\,]$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[\,-4\ ;\ -\frac{5}{3}\,]$

2. - *Sur l'intervalle [$-\frac{5}{3}$; 1], la fonction f est définie, continue et strictement* décroissante et prend ses valeurs dans $[1\ ;\ f(-\frac{5}{3})\,]$. De plus, $0\notin[1\ ;\ f(-\frac{5}{3})\,]$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs *intermédiaires, l'équation $f(x)$ =0 n'admet aucune solution sur l'intervalle* [$-\frac{5}{3}$; 1].

3. -*Sur l'intervalle [1 ; $+\infty$ [, la fonction f est définie, continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans $[1\ ;+\infty[$. De plus, $0\notin[1\ ;+\infty[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle [$-\frac{5}{3}$; 1].*

Conclusion : l'équation $f(x)=$ 0 admet une unique solution $\alpha\in[\,-4\ ;\ -\frac{5}{3}\,]$

3) *Donnons un encadrement puis une valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près, de α*

A l'aide de la calculatrice ; ouvrir « DefTable » ou « TableSet »,

rentrer « DebTable =– 4 » ou « TableStart = – 4 » et préciser « PasTable = 1 ».

On constate que $f(-4)=$– 24 < 0 et $f(-3)$ = 1 > 0.

Donc, d'après le corollaire du TVI. : $-4<\alpha<-3$.

On recommence avec un « PasTable = 0.1 ». On constate que f (–3,1) = –0,681 < 0 et

$f(-3) = 1 > 0$. Donc, d'après le corollaire du TVI. : $-3,1 < \alpha < -3,0$

Enfin, on recommence avec un « PasTable = 0.01 ». On constate que $f(-3,07) = -0,1595 < 0$

et $f(-3,06) = 0,01098 > 0$. Donc, d'après le corollaire du TVI. : $-3,07 < \alpha < -3,06$.

***Conclusion 1.** : Un encadrement de α à 10^{-2} près, est donné par : $-3,07 < \alpha < -3,06$ à 10^{-2} près.*

Pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-2} près, il suffit de recommencer la même procédure que ci-dessus avec un « PasTable = 0.001 », ou plus simplement « PasTable = 0.005 ».
Avec , ou « »,

on peut aussi calculer directement $f(-3,065) = -0,0741 < 0$ et $f(-3,06) = 0,01098 > 0$. Donc α est dans la deuxième moitié de l'intervalle d'encadrement. Ce qui signifie que « le chiffre suivant est supérieur ou égal à 5 ».

En déduit qu'une valeur approchée de α à 10^{-2} près est donnée

par : $\alpha \simeq -3,06$ à 10^{-2} près.

4) Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

D'après le tableau de variation de la fonction f et ce qui précède, on peut déduire le signe de f :

Pour tout $x < \alpha$: $f(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$: $f(x) > 0$, qu'on peut résumer dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Corrigé exercice n°3 - énoncé ▼

a) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur [-3 ; 6].
Pour tout $x \in [-3 ; 6]$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.
D'après la propriété sur le signe d'un trinôme qui est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines et du signe contraire à a à l'intérieur, on en déduit que :

$f'(x) > 0$ pour $x \in [-3 ; -2[\cup]2 ; 6[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]-2 ; 2[$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	9	↗	16	↘	-16	↗	144

b) $f(-3) = 9$, $f(6) = 144$ et $30 \in [9 ; 144]$

La fonction f est une fonction polynôme, elle est **alors continue** sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur [-3 ; 6] ; de plus **30 est compris entre *f*(-3) et *f*(6).**

Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc d'affirmer que l'équation $f(x) = 30$ a au moins une solution dans l'intervalle [-3 ; 6].

c)

• f est croissante sur [-3 ; -2] et décroissante sur [-2 ; 2], elle admet alors $f(-2)$ = **16.**

pour maximum sur [- 3 ;2]

L'équation $f(x) = 30$ n'admet donc pas de solution sur [-3 ; 2].

• f (2) = - 16 et f(6) = 144 et 30 $\in$ [-16 ; 144] x 2 α 6

x	2	α	6
			144
f		30	
	-16		

f est **strictement croissante** et **continue sur [2 ; 6]** et **30 est compris entre f(2) et f (6)** et donc d'après

le théorème de la valeur intermédiaire : l'équation $f(x) = 30$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 6].

d) On tabule $f(x)$ sur l'intervalle [2 ; 6] avec un pas de 0,1 puis avec un pas de 0,01.

• on observe que : $f(4,3) \leq 30$ et $f(4,4) \geq 30$

On sait que $f(\alpha) = 30$ donc $4,3 \leq \alpha \leq 4,4$

• on observe que : $f(4,34) \leq 30$ et $f(4,35) \geq 30$

On sait que $f(\alpha) = 30$ donc $4,34 \leq \alpha \leq 4,35$

Donc un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α est $4,34 \leq \alpha \leq 4,35$.

Corrigé exercice n°4 - énoncé ▼

Rappelons tout d'abord que, par convention, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle. Déterminons désormais le nombre de solutions de chaque équation proposée.

1) Déterminons tout d'abord le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Sur $]-\infty ; 0]$, la fonction est continue et strictement croissante et $f(]-\infty;0]) =]-2;4]$ Or, $3 \in]-2 ;4]$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)$ =3 admet une unique solution dans] $-\infty$;0].

Sur]0 ;2[, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]0 ;2[)=]$-\infty$;4 [. Or,3$\in$]$-\infty$;4 [donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans]0 ;2[.

Sur]2; $+\infty$ [, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]2 ; $+\infty$ [)=]0 ; $+\infty$ [. Comme 3$\in$]0 ; $+\infty$] [, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans]2 ; $+\infty$ [,
en vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
Finalement, **l'équation $f(x)=3$ admet exactement trois solutions réelles**.

2) Déterminons ensuite le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

Sur]$-\infty$;0], la fonction est continue et strictement croissante et f (]$-\infty$;0])=]-2 ;4]. Or,3$\in$]-2 ;4] donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet pas une unique solution dans]$-\infty$;0].

Sur]0 ;2[, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]0 ;2[)=]$-\infty$;4[. Or,0$\in$]$-\infty$; 4 [
donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans]0 ;2[.

Sur]2 ; $+\infty$ [, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]2 ; $+\infty$ [)=]0 ; $+\infty$ [.
Comme 0$\notin$]0 ; $+\infty$ [, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans]2 ; $+\infty$ [.
Finalement, **l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions réelles et deux seules, l'une dans] $-\infty$;0] et l'autre dans]0 ;2[.**

3) Enfin, déterminons le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$.

Sur]$-\infty$; 0], la fonction est continue et strictement croissante et f (]$-\infty$;0])=]-2 ;4]. Or,-2$\notin$]-2 ;4] donc l'équation $f(x)=-2$ n'admet pas de solution dans] $-\infty$;0].

Sur]0 ;2[, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]0 ;2[)=] $-\infty$;4[.
Or,-2$\in$]$-\infty$;4[
donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution dans]0 ;2[.

Sur]2 ; $+\infty$ [, la fonction est continue et strictement décroissante et f (]2 ; $+\infty$ [)=]0 ; $+\infty$ [. Comme -2$\notin$]0 ; $+\infty$ [, l'équation $f(x)=-2$ n'admet pas de solution dans]2 ; $+\infty$ [.
Finalement, **l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution réelle,
en l'occurrence dans]0 ;2[.**