Exercices : Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1

On considère une fonction f qui admet le tableau de variation suivant :

x	-5		1		5		10^3
Variation de f	4	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-1 ‖ 5	$\searrow$	-13

1. Justifier que la fonction f s'annule deux fois sur son ensemble de définition.

2. Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice 2

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$$

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f en ses bornes.
   c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser lesquelles.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

3. a. Justifier que la fonction f ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.
   b. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice ; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction f.

Exercice 3

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
   $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
   a. Etudier les variations de P.
   b. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une racine réelle et une seule, α, et que α appartient à l'intervalle $\left]1{,}6\,;1{,}7\right[$

2. Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ par :

   $$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

   On désigne par $\left(\mathscr{C}\right)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à une repère orthonormé *(on prendra comme unité 4 cm)*.

   a. Etudier les variations de f *(on utilisera pour cela les résultats du 1.)*.
   b. Ecrire une équation de la droite (D) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D) dans l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$.
   c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction f ; on notera α ce nombre.

2. On pose pour valeur $a_0=0$ et $b_0=2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et convergentes vers α.

a. Compléter le tableau ci-dessous :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

b. Avec quelle précision obtient-on la valeur de α à l'aide du tableau.