Intégrale d'une fonction

Définition

On appelle intégrale de f sur [a ; b] le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Exemple :

Calcul de l'intégrale : $\int_2^3 xdx$

- Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \frac{x^2}{2}$.
- Donc $\int_2^3 xdx = F(3) - F(2) = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$

Remarque :

- L'intégrale d'une fonction f sur [a ; b] est indépendante du choix de la primitive F.
- On note aussi : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - f(a)$
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)$ la variable x est « muette », ce qui signifie que

  Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

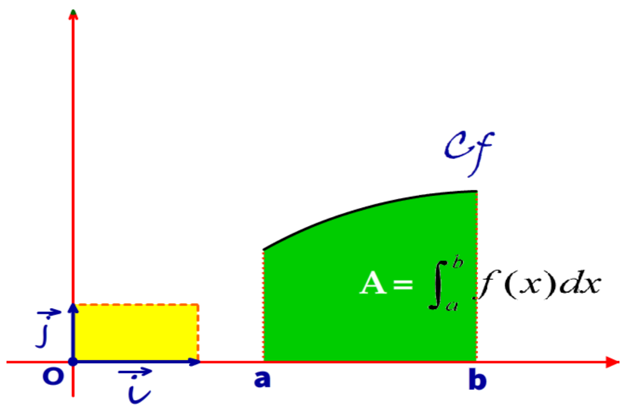
► Interprétation graphique : calcul d'aire

• Aire d'une fonction positive

Propriété

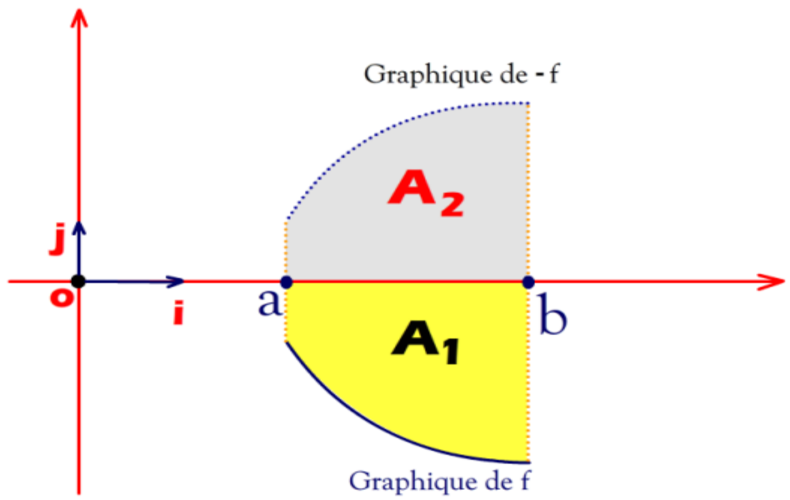
Si f est une fonction positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b exprimée en unité d'aire.

Illustration



a) Aire d'une fonction négative

Si la fonction f est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

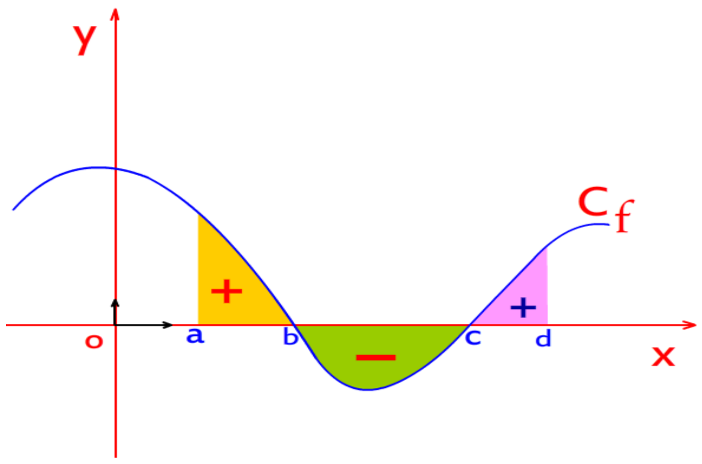


Lorsque la fonction f est continue et **négative** sur un intervalle [a ;b] **,** alors **l'aire** délimitée par la courbe C*f*, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=a$ et la droite d'équation $y=b$ est représentée dans ce cas par ,

$A_1 = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx = A_2$.

b) Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.



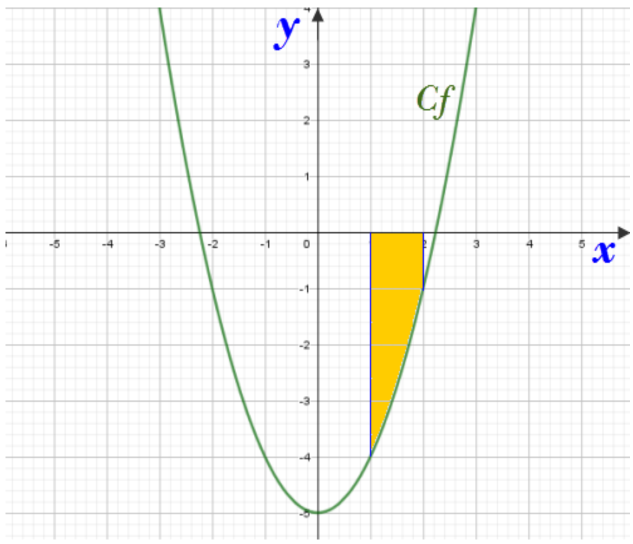
L'aire entre *Cf* ; l'axe des *x* et les droites d'équation *x=a et x=d*

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$
$$A = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c (-f(x))dx + \int_c^d f(x)dx$$
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

Exemple :

A l'aire délimitée par la courbe représentative de la fonction f(x)= x^2-5, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=1$ et la droite d'équation $x=2$:

$$A = -\int_1^2 f(x)dx = -\int_b^c (x^2 - 5)dx$$



c) Aire entre deux courbes :

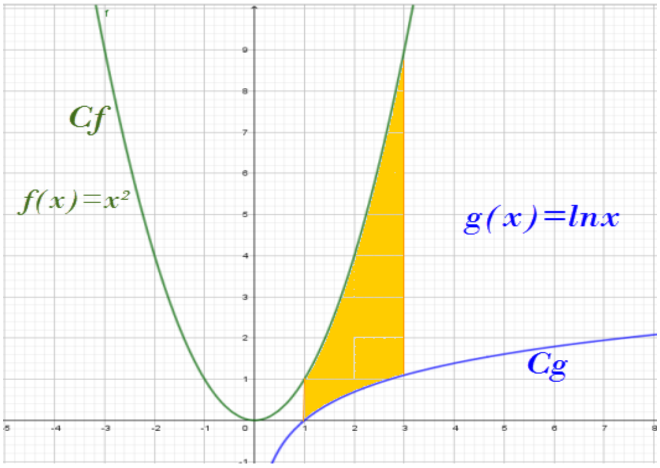
Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur [a ;b] telles que $f \geq g$ sur [a ;b].

L'aire comprise entre la courbe représentative de *f*, la courbe représentative de *g*, la droite d'équation $x=a$ et la droite d'équation $x=b$ est représentée par $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Exemple :

A aire comprise entre la courbe représentative de la fonction carrée, la courbe représentative de la fonction *logarithme népérien*, la droite d'équation $x=1$ et la droite d'équation $x=3$ *est :*

$A=\int_1^3 (f(x)-g(x))dx=\int_1^3 (x^2-\ln x)dx$.



▶ Propriétés de l'intégrale

Bornes :

Soit *f* une fonction continue sur [a ;b].

- $A=\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $A=\int_a^a f(x)dx=0$

Linéarité :

Soient *f et g* deux fonctions continues sur [a ;b]. Soit α un nombre réel.

- $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

Positivité :

Soit *f* une fonction continue sur [a ;b].

- Si $f\geq 0$ est **sur [a ;b],** alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$

Comparaison d'intégrales :

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur [a ;b].

- Si $f\geq g$ *sur [a ;b] alors* $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles :

Soit *f* une fonction continue sur [a ;b]. soit c∈[a ;b].

➲ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Valeur moyenne :

Soit *f* une fonction continue sur [a ;b].

➲ La **valeur moyenne** de *f* sur [a ;b] . est : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Inégalités de la moyenne :

Soit *f* une fonction continue sur [a ;b]. Soit *m* et *M* deux réels.

➲ Si **pour tout** $x \in [a;b]$ ***; m ≤ f(x) ≤ M alors m ≤*** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *≤ M.*

Ces inégalités découlent directement de la comparaison d'intégrales.